Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

10. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 37

a) Sei X ein Vektorraum. Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas, daß X eine Basis hat.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Ein normierter Vektorraum X hat genau dann endliche Dimension, wenn jedes lineare Funktional auf X stetig ist.

Aufgabe 38 Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$.

a) Jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ in H hat eine in H schwach konvergente Teilfolge.

Hinweis: Anwendung von Aufgabe 36.

b) T ist genau dann ein kompakter Operator, wenn für alle $x \in H$ und $(x_n)_n$ in H, so daß (x_n) schwach gegen x konvergiert, die Folge (Tx_n) in der Norm gegen Tx konvergiert.

Aufgabe 39 Es sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum, $I\colon X \to X$ die Identität und $T \in B(X)$ kompakt. Zeigen Sie, daß $\|T - I\| \geq 1$ gilt, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $B(X)$ ist.

Aufgabe 40 Es sei $1 \leq p < \infty$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in l_∞. Definieren Sie den Operator

$$T\colon l_p \to l_p \text{ durch } (x_n)_n \mapsto T((x_n)_n) = (a_n x_n)_n$$

und zeigen Sie:

1. $T(l_p)$ ist abgschlossen genau dann, wenn $\inf\{\, |a_n| \mid n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0 \,\} > 0$ ist, wobei $\inf \emptyset = \infty$ gesetzt wird.
2. T ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| > 0$ ist.

Abgabe: Montag, 19.01.2004, vor der Vorlesung.