Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

11. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 41 Sei X eine unitale Banachalgebra mit Einheit $e \in X$ und $x, y \in X$.

a) Wenn x und xy invertierbar sind, dann ist y invertierbar. Wenn xy und yx invertierbar sind, dann sind x und y invertierbar. Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß $xy = e \neq yx$ möglich ist. Zeigen Sie, wenn $xy = e \neq yx$ gilt, dann ist yx ein nicht triviales idempotentes Element. Wenn $\dim X < \infty$ und $xy = e$, dann folgt $yx = e$.

b) Für $a \in X$ definieren wir $L_a \in L(X)$ durch $L_a x = ax$. Zeigen Sie, daß a genau dann invertierbar ist, wenn L_a invertierbar ist. Folgern Sie, daß $\sigma(a) = \sigma(L_a)$ gilt.

Aufgabe 42 Sei $S\colon l_2 \to l_2$ der Shift-Operator $S(x_n)_n = (x_{n-1})_n$, wobei $x_0 = 0$. Bestimmen Sie Spektrum $\sigma(S)$, Punktspektrum $\sigma_p(S)$, Residualspektrum $\sigma_r(S)$ und das kontinuierliche Spektrum $\sigma_c(S)$ von S. Zeigen Sie, daß $\sigma_p(S^*) = \sigma_r(S)$, $\sigma_r(S^*) = \sigma_p(S)$ und $\sigma_c(S^*) = \sigma_c(S)$. Welche Vielfachheit haben die Eigenwerte von S^*? Zeigen Sie, daß Eigenvektoren von S^* nicht zueinander orthogonal sein können.

Aufgabe 43 Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Zeigen Sie, daß $\sigma(T) = \sigma(T')$ und daß

$$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T).$$

Aufgabe 44 Sei $X = C([0,1])$. Es sei $T \in L(X)$ definiert durch

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad f \in X.$$

Zeigen Sie, daß T injektiv ist. Zeigen Sie, daß

$$(T^{n+1}f)(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n f(y)\,dy$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie, daß $r(T) = 0$ ist.

Abgabe: Montag, 26.01.2004, vor der Vorlesung.