Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

13. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 49 Seien H ein Hilbertraum und $S, T \in B(H)$, so daß $S \geq 0$ und $ST = TS$.

a) Für $T = T^*$ zeigen Sie induktiv

$$|\langle STx, x\rangle| \leq \langle ST^{2^n}x, x\rangle^{2^{-n}} \langle Sx, x\rangle^{1-2^{-n}}$$

für alle $x \in H$ und $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: $b(x, y) = \langle Sx, y\rangle$ ist eine Sesquilinearform, für die die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt.

b) Zeigen Sie, daß $|\langle STx, x\rangle| \leq \|T\| \langle Sx, x\rangle$ für alle $x \in H$ gilt.

Aufgabe 50 Seien H ein Hilbertraum und $S, T \in B(H)$, so daß $S \geq 0$ und $T \geq 0$. Wenn $ST = TS$, dann gilt $ST \geq 0$.

Aufgabe 51 Sei A eine unitale Banachalgebra mit Einheit $e \in A$. Für $a \in A$ sei $B = \mathrm{BAlg}(a, e)$ die von a und e erzeugte Banachalgebra. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\lambda \in \sigma_B(a)$
2. $J_\lambda = \overline{(\lambda - a)B}$ ist ein maximales Ideal in B
3. Es gibt einen Charakter $\chi\colon B \to \mathbb{C}$, so daß $\chi(a) = \lambda$

Aufgabe 52 Sei A eine unitale Banachalgebra mit Einheit $e \in A$. Es sei $a \in A$ und $B = \mathrm{BAlg}(a, e)$. Für $b \in B$ gilt $\lambda \in \sigma_B(b)$ genau dann, wenn es einen Charakter $\chi\colon B \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $\chi(b) = \lambda$.

Abgabe: Montag, 09.02.2004, vor der Vorlesung.