UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

4. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 13 **schwach beschränkt = normbeschränkt**
Es sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathscr{H}$ heißt *schwach beschränkt*, falls für alle $x \in \mathscr{H}$ die Menge $\{\langle x, y\rangle \mid y \in M\}$ komplexer Zahlen beschränkt ist. M heißt *normbeschränkt*, falls $\{\|x\| \mid x \in M\}$ beschränkt ist.
Jede normbeschränkte Teilmenge eines Hilbertraumes ist offenbar schwach beschränkt. (Warum?) Überraschenderweise gilt auch die Umkehrung:
Jede schwach beschränkte Teilmenge eines Hilbertraumes ist normbeschränkt.
Führe die Beweisskizze in HALMOS, »A Hilbert space problem book«, Seite 184, aus.

Aufgabe 14 Es sei $(y_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen, und für alle Folgen $(x_n)_n \in l_2$ konvergiere die Reihe $\sum_n x_n y_n$.
Zeige: Dann ist auch $(y_n)_n \in l_2$.
Hinweis: Benutze die *abgeschnittenen Folgen* $(y_1, \dots, y_k, 0, \dots)$ und Aufgabe 13.

Aufgabe 15 Wir betrachten $C([0,1])$ mit der Norm $\| \|_2$, die durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben ist.
Zeige: $C([0,1])$ ist mit dieser Norm nicht vollständig.
Hinweis: Eine geeignete Funktionenfolge zu finden sollte nach unseren bisherigen Übungen nicht mehr schwer sein. Hilfsbehauptung: Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen bezüglich $\| \|_2$, so konvergiert die Folge der Stammfunktionen gleichmäßig.

Aufgabe 16 **Zur Vervollständigung eines Prähilbertraumes**
Es sei X ein normierter Raum, $Y \subseteq X$ ein dichter Teilraum, und auf Y sei ein Skalarprodukt gegeben, so dass für alle $y \in Y$ gilt:

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle.$$

Zeige: Dieses Skalarprodukt lässt sich eindeutig auf ganz X fortsetzen, so dass diese Normformel auf ganz X gilt.
Hinweis: Definiere das Skalarprodukt durch die in der Vorlesung angegebene Polarisationsformel:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \|x + \mathrm{i}^k y\|^2$$

Abgabe: Montag, 24. 11. 2003, vor der Vorlesung.