UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

5. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 17 Unterhalbstetige Funktionen

Es sei X ein metrischer (allgemeiner: topologischer) Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. f heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in X$, falls $f(x_0) \neq -\infty$, und falls es zu jedem reellen $r < f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt: $r < f(x)$.

a) Zeige: Das punktweise Supremum einer Familie in x_0 unterhalbstetiger Funktionen ist in x_0 unterhalbstetig.

b) Zeige: Ist (X,d) ein metrischer Raum, und ist $f : X \to [0,\infty]$ unterhalbstetig, so gibt es eine monoton wachsende Folge *stetiger* Funktionen f_n, die punktweise gegen f konvergiert.

Hinweis: $f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x,y) \mid y \in X\}$.

Aufgabe 18 Adjungierte Operatoren

a) Es sei T_k ein Fredholmscher Integraloperator auf $C([0,1])$ mit dem stetigen Kern k. Zeige: Für alle Funktionen $f, g \in C([0,1])$ ist (mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 15)

$$\langle T_k f, g\rangle = \langle f, T_{k^*} g\rangle$$

mit $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$.

b) Auf $C([0,1])$ definieren wir die Operatoren

$$T f(s) = \mathrm{i} \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und}$$

$$S f(s) = \mathrm{i} \int_1^s f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeige:

$$\langle T f, g\rangle = \langle f, Sg\rangle.$$

Aufgabe 19 Satz von Baire

Eine Teilmenge eines metrischen (allgemeiner: topologischen) Raumes X heißt *nirgends dicht,* falls ihr Abschluss leeres Inneres hat. Eine Teilmenge von X heißt *mager* oder *von erster Kategorie,* falls sie die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist. Sonst heißt sie *fett* oder *von zweiter Kategorie*.

Zeige: Jeder vollständige metrische Raum ist (als Teilmenge von sich selbst) von zweiter Kategorie.

Aufgabe 20 Gleichmäßige Beschränktheit

Es sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $f : \mathbb{R} \to \mathscr{H}$ eine Funktion. f heißt *schwach differenzierbar* in $t_0 \in \mathbb{R}$, falls es einen Vektor $x \in \mathscr{H}$ gibt, so dass für alle $y \in \mathscr{H}$ die Funktion $t \mapsto \langle y, f(t)\rangle$ in t_0 differenzierbar ist mit Ableitung $\langle y, x\rangle$.

Zeige: Dann ist f stetig in t_0.

Abgabe: Montag, 1. 12. 2003, vor der Vorlesung.