UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

7. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 25 Adjungierte Operatoren
Es sei $1 \leqslant p < \infty$. Berechne die adjungierten Operatoren zu den Operatoren S und T aus Aufgabe 8.

Aufgabe 26 Sublineare Funktionale, Hahn-Banach

a) Es seien X ein reeller Vektorraum, ϑ_1 und ϑ_2 sublineare Funktionale auf X und φ ein lineares Funktional.

Zeige: Ist $\varphi \leqslant \vartheta_1 + \vartheta_2$, so gibt es lineare Funktionale φ_1 und φ_2, so dass $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\varphi_i \leqslant \vartheta_i$.

Das gleiche gilt, falls ϑ_1 und $\vartheta_2 \geqslant 0$ sind und $\varphi \leqslant \max\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$.

Hinweis: Bastele aus ϑ_1 und ϑ_2 geeignete sublineare Funktionale auf $X \times X$.

b) Zeige: Jedes beschränkte lineare Funktional auf dem Raum der beschränkten reellen Folgen $l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ lässt sich als Differenz zweier *positiver* linearer Funktionale schreiben. (Ein Funktional heißt positiv, falls es auf allen Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \geqslant 0$ für alle n nichtnegative Werte hat.)

Hinweis: Schreibe die Norm $\| \ \|_\infty$ als $\|(a_n)_n\|_\infty = \max\{\max\{\sup_n a_n, 0\}, \max\{\sup_n(-a_n), 0\}\}$ und wende Teil a) an.

Aufgabe 27 Man kann lineare Funktionale $\varphi \in (l_\infty)'$ auch auf andere Art zerlegen:

a) Zeige: Zu $\varphi \in (l_\infty)'$ gibt es φ_1 und $\varphi_2 \in (l_\infty)'$, so dass $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1|_{c_0} = 0$, und φ_2 ist von der Gestalt

$$\varphi_2((a_n)_n) = \sum_n a_n b_n$$

mit einer Folge $(b_n)_n \in l_1$.

b) Diese Zerlegung ist eindeutig, es ist $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$, und $\|\varphi_2\| = \|(b_n)_n\|_1$.

Hinweis: Betrachte »abgeschnittene« Folgen.

c) Folgere: Jedes stetige lineare Funktional auf c_0 hat *genau eine* Fortsetzung zu einem normgleichen linearen Funktional auf l_∞. (Warum ist das etwas besonderes?)

Aufgabe 28 Banachlimites
Ein Funktional $\varphi \in l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})'$ heißt *Banachlimes*, falls es positiv ist, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi((a_n)_n) = \lim_n a_n$ für alle $(a_n)_n \in c$, und wenn es *translationsinvariant* ist, das heißt, $\varphi \circ T = \varphi$ mit dem Shiftoperator T aus Aufgabe 8.
Zeige mit Hilfe des sublinearen Funktionals $\vartheta((a_n)_n) = \limsup_n a_n$: Es gibt Banachlimites.
Zeige weiter: Banachlimites sind nicht multiplikativ, das heißt, es gilt nicht für alle $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, dass $\varphi((a_n b_n)_n) = \varphi((a_n)_n)\varphi((b_n)_n)$ ist.

Abgabe: Montag, 15. 12. 2003, vor der Vorlesung.