Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

9. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 33 Sei X ein Vektorraum und $C \subset X$ konvex mit den Eigenschaften

1. für jedes $x \in X$ gibt es $\delta \geq 0$ so daß $\lambda x \in C$ für alle $0 \leq \lambda \leq \delta$,
2. $\lambda C \subset C$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$.

Zeigen Sie, daß durch $\|x\|_C = \inf\{\, \lambda > 0 \mid x \in \lambda C \,\}$ eine Halbnorm auf X definiert wird. Jede Halbnorm $\|\cdot\|$ auf X ist von der Form $\|\cdot\| = \|\cdot\|_C$, wobei C eine konvexe Menge mit den Eigenschaften 1. und 2. ist.

Aufgabe 34 Sei $S\colon l_1 \to l_1$ definiert durch $S((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$ und $T = \mathrm{id}_{l_1} - S$. Zeigen Sie, daß $T'(l_\infty)$ nicht norm-dicht in $(\ker T)^\perp$ liegt.

Aufgabe 35

a) Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X'$ eine Teilmenge, so daß die lineare Hülle von M norm-dicht in X' liegt. Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in X und $x \in X$, so daß $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in M$. Zeigen Sie, daß $(x_n)_n$ schwach gegen x konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß man auf die Beschränktheit der Folge $(x_n)_n$ in $a)$ nicht verzichten kann.

Hinweis: Im Spezialfall kann in a) X als Hilbertraum H und M als Orthonormalbasis von H gewählt werden.

Aufgabe 36 Sei X ein separabler Banachraum. Zeigen Sie, daß jede beschränkte Folge $(\varphi_n)_n$ in X' eine schwach* konvergente Teilfolge hat, das heißt, daß es ein $\varphi \in X'$ und eine Teilfolge $(\varphi_{g(n)})_n$ gibt so daß $\varphi_{g(n)}(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Für $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ dicht in X wähle man sukzessive konvergente Teilfolgen $(\varphi_{f_1(n)}(x_1))_n$, $(\varphi_{f_2(f_1(n))}(x_2))_n, \ldots$. Dann ist die "Diagonalfolge" $(\varphi_{f_n \cdots f_1(n)}(x))_n$ konvergent für alle $x \in X$.

Abgabe: Montag, 12.01.2004, vor der Vorlesung.