Universität des Saarlandes
Christian Bender
Nikolaus Schweizer

31. Mai 2013

Diskrete Finanzmathematik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zu einem Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_T)$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in $\mathbb{R}^T$, $T \in \mathbb{N}$, definieren wir eine Familie von σ-Algebren durch

$$\mathcal{F}_t^X := \{\{\omega;\ (X_1, \dots, X_t)(\omega) \in B\};\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}^t\}; \quad t = 1, \dots, T.$$

Zeigen Sie:

a) Für $s \leq t$ gilt $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_t^X$.

b) Ist Ω endlich, so ist A ein Element des Atomssytems von $\mathcal{F}_t^X$ genau dann, wenn ein $\omega' \in \Omega$ existiert mit

$$A = \{\omega;\ X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ für alle } s = 1, \dots, t\}.$$

Hinweis: *Verwenden Sie die Konstruktion des Atomsystems aus Lemma 3.1.2.*

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t\in\{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$ ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 7 Zuständen, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_7\}$. Es sei $S_t^0 = 100 + 5t$ für $t = 0, 1, 2$ sowie

$$\begin{aligned}
&S_0^1 = 100,\\
&S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_3) = 110,\ S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = S_1^1(\omega_6) = 90, S_1^1(\omega_7) = 63;\\
&S_2^1(\omega_1) = 120,\ S_2^1(\omega_2) = 110,\\
&S_2^1(\omega_3) = S_2^1(\omega_4) = 100,\ S_2^1(\omega_5) = 90,\ S_2^1(\omega_6) = 75,\ S_2^1(\omega_7) = 66.
\end{aligned}$$

Es gelte $P(\{\omega_n\}) > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$. Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\},\ \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B);\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

Zerlegen Sie $\mathcal{M}$ in 1-Perioden-Untermodelle und untersuchen Sie diese auf Arbitragefreiheit.

Abgabe: 14. Juni vor der Vorlesung