Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SS 2013
19. April 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

1. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Beschreiben Sie mathematisch das zu Grunde liegende diskrete Zufallsexperiment (vgl. Def. 1.1) für das zweimalige Würfeln mit einem fairen Würfel. Bestimmen Sie für dieses Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(i) Die erste Augenzahl ist mindestens so groß wie die zweite.

(ii) Die erste Augenzahl ist um genau 2 kleiner als die zweite.

(iii) Der Abstand der Augenzahlen ist größer gleich 2 und kleiner gleich 5.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien A, B und C drei Ereignisse in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Wir definieren die symmetrische Differenz als

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie, dass

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(ii) $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

(iii) $P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_n\leq k} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right).$$

(ii) Aus $A_n \subset A_k$ für alle $n \leq k$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(iii) Aus $A_k \subset A_n$ für alle $n \leq k$ folgt

$$\lim_{k \to \infty} P(A_k) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Hinweise:
Sie können (i) mittels eines Induktionsbeweises zeigen.
Unter Zuhilfenahme der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können Sie in (ii) das Ereignis $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ als eine disjunkte Vereinigung schreiben.
In (iii) können Sie (ii) benutzen.