Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
28. Juni 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

11. Übung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie für eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X, dass

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) P(X \geq k)$$

gilt.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Zu Beispiel 11.10.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, welche gleichverteilt auf $\{1, \ldots, N\}$ mit unbekanntem Parameter $N \in \mathbb{N}$ sind. Wir definieren

$$T_n^* := \max_{k \leq n} X_k \qquad \text{sowie} \qquad \tilde{T}_n := \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $(\min_{k \leq n} X_k - 1)$ und $(N - \max_{k \leq n} X_k)$ identisch verteilt sind.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$E\left((N - T_n^*)^2\right) = \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{k-1}{N}\right)^n (2(N-k)+1).$$

(iii) Bestimmen Sie die mittleren quadratischen Fehler der Schätzer T_n^* und $\tilde{T}_n$. Plotten Sie am Computer diese mittleren quadratischen Fehler für $n = 100$ und $N = 1, \ldots, 1000$. Welchen Schätzer würden Sie bevorzugen?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Von einer Population $\mathscr{P}$ sei bekannt, dass mindestens drei Arten a_i, $i = 1, 2, 3$, von Individuen mit jeweiliger Proportion p_i zur Gesamtpopulation existieren, wobei

$$p_i := \binom{2}{i-1} \vartheta^{2-(i-1)} (1-\vartheta)^{i-1} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Bei einer Stichprobe aus $\mathscr{P}$ vom Umfang $n \in \mathbb{N}$ sei genau n_i-mal die Art a_i, $i = 1, 2, 3$, aufgetreten. Zeigen Sie, dass

$$\frac{2n_1 + n_2}{2n}$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist, falls $2n_1 + n_2$ und $n_2 + 2n_3$ positiv sind.