Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

12. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit unbekanntem Parameter $p \in [0,1]$ und sei $\alpha \in (0,1)$. Geben Sie mit ähnlichen Techniken wie in Beispiel 11.13 ein Konfidenzintervall $C(X)$ für p zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ an.

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst, dass die Verteilungsfunktion einer Binomialverteilung als Funktion in p streng monoton fallend ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(i) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und normalverteilt mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für σ^2. Ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer?

(ii) Sei nun $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge normalverteilter Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass die in (i) bestimmte Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Schätzern konsistent für σ^2 ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte f_ϑ, wobei $\vartheta \in \Theta$ ein unbekannter Parameter sei. Wir wollen

$$g(\vartheta) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x,y) f_\vartheta(x) f_\vartheta(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

schätzen, wobei $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine vorgegeben Funktion ist. Dazu betrachten wir folgende zwei Schätzer:

$$T := \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \bar{g}(X_i, X_j) \qquad \text{und} \qquad \tilde{T} := \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{g}(X_i, X_j).$$

(i) Bestimmen Sie $E_\vartheta(T)$ sowie $E_\vartheta(\tilde{T})$. Welche Aussage können Sie über die Erwartungstreue der Schätzer T und $\tilde{T}$ treffen?

(ii) Wählen Sie $\bar{g}$ so, dass $g(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta(X_1)$. Geben Sie $E_\vartheta(T)$ sowie $E_\vartheta(\tilde{T})$ für diese spezielle Wahl von $\bar{g}$ an.