Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
12. Juli 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

13. Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bei der Lieferung von frischem Obst will der Importeur testen, ob von 100 gelieferten Pfirsichen weniger als 10 bereits verdorben sind. Zu diesem Zweck wählt der Importeur rein zufällig 10 der 100 Pfirsiche zur Überprüfung aus. Ist einer dieser 10 Pfirsiche verdorben, lehnt der Importeur die komplette Lieferung ab. Bestimmen Sie die Hypothese, die Alternative, den Verwerfungsbereich sowie die Gütefunktion des Tests, welcher dem Verhalten des Importeurs zu Grunde liegt, und berechnen Sie das Niveau dieses Tests.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2. Zeichnen Sie qualitativ die Teststatistik unter P_{μ_0} samt Annahme- und Ablehnungsbereichen für die Gauß-Tests auf $\mu = \mu_0$ und $\mu \leq \mu_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$. Ändert sich etwas, wenn man auf $\mu < \mu_0$ anstatt $\mu \leq \mu_0$ testet?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Betrachten Sie eine Stichprobe vom Umfang $n = 16$ aus einer Grundmenge, welche normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 = 6{,}25$ ist. Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ die Hypothese $H : \mu = 1000$ gegen die Alternative $K : \mu \neq 1000$, falls für den beobachteten Mittelwert $\bar{x} = 998{,}2875$ gilt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Läufer läuft regelmäßig Trainingseinheiten von je 20 km. Es bezeichne $x_1, \ldots, x_n$, die beobachtete Zeit in Stunden pro 20 km der i-ten Trainingseinheit. Es kann angenommen werden, dass die $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen von unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 1{,}44$. Sein Trainer argwöhnt, dass er im Durchschnitt mehr als 2,5 h pro 20 km benötigt. Stellen Sie einen Test mit einer minimalen Anzahl von Trainingseinheiten n auf, der folgendes gewährleistet: Die Wahrscheinlichkeit, dem Läufer fälschlicherweise zu unterstellen, dass er so langsam ist, soll durch 5% beschränkt sein. Zudem soll die Wahrscheinlichkeit, ihm fälschlicherweise zuzusprechen, dass er im Durchschnitt schneller als 2,5 h ist, durch 10 % beschränkt sein , wenn er in Wirklichkeit im Durchschnitt mindestens 3,3 h benötigt.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Dichte der Student-t-Verteilung mit n Freiheitsgraden für $n \to \infty$ gegen die Dichte der Standardnormalverteilung konvergiert.

Hinweis: Sie können folgende Folgerung aus der Stirling-Formel benutzen:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \quad \text{für } x \to \infty,$$

wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet.