

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

14. Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bei einer Warentest-Firma geht der Vorwurf ein, dass ein Müsli-Produkt im Mittel weniger als die angegebenen 400g Müsli beinhaltet. Die Warentest-Firma kauft daraufhin 9 Müsli-Packungen, stellt die Abfüllgewichte fest und führt einen Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ durch. Voruntersuchungen zeigten, dass die Abfüllgewichte als unabhängig und identisch normalverteilt angenommen werden können.

- (i) Welches statistisches Modell sollte zu Grunde gelegt werden und welcher Parameter wird getestet?
- (ii) Formulieren Sie eine sinnvolle Hypothese H und Alternative K .
- (iii) Bestimmen Sie eine geeignete Teststatistik und ihre Verteilung, falls H grenzwertig zutrifft, d.h. der wahre Mittelwert $\mu = 400g$ ist.
- (iv) Führen Sie den Test sowohl zum Niveau $\alpha = 0,05$ als auch zum Niveau $\alpha = 0,01$ für eine Stichprobe mit folgenden festgestellten Abfüllgewichten durch:

403g, 400g, 393g, 396g, 398g, 401g, 398g, 397g, 396g.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beweis von Lemma 13.6 b. Sei f die Dichte einer χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden. Dann gilt

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis:

Erinnern Sie sich an Aufgabe 4 vom 9. ÜB und führen Sie einen Induktionsbeweis durch.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Schraubenherstellerfirma behauptet, dass sie Schrauben produziert, welche im Mittel 20mm lang sind, und dass die bei der Produktion auftretende Varianz der Schraubenlänge 0,3mm² beträgt. Als Realisierung einer stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Stichprobe X_1, \dots, X_9 ergaben sich

$$\bar{x} := \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 19,85mm \quad \text{und} \quad \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 0,42mm^2.$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Schraubenlänge normalverteilt ist. Testen Sie die folgenden Hypothesen zum Niveau $\alpha = 0,01$:

- (i) $H : \mu = 20$ und $K : \mu \neq 20$,

(ii) $H : \sigma^2 \leq 0,3$ und $K : \sigma^2 > 0,3$.