Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
3. Mai 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

3. Übung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es seien X eine diskrete, auf den Werten $0, 1, \ldots, n$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable und Y eine mit den Parametern n und $p \in (0, 1)$ binomialverteilte Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass

$$\operatorname{Var}(X) \geq \operatorname{Var}(Y)$$

gilt und zeigen Sie, dass in dieser Ungleichung genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn $n = 1$ und $p = 1/2$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kommenden Tag zu 60% schönes und zu 40% schlechtes Wetter voraus; die Trefferquote liegt für die Voraussage “schön” bei 80% und für die Voraussage “schlecht” bei 90%.

(i) An wieviel Prozent der Tage ist das Wetter schön?

(ii) Trotz schönen Wetters ist Kumpel K nicht zum verabredeten Fallschirmsprung erschienen mit dem Hinweis, der gestrige Wetterbericht wäre schlecht gewesen, so dass er anders disponierte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies bei Unkenntnis des gestrigen Wetterberichts nur eine Ausrede?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In der richtigen Dosierung zeige ein Medikament in Tablettenform unabhängig voneinander zwei Wirkungen: Die nicht sofort erkennbare Heilwirkung mit Wahrscheinlichkeit 0,9 und die sofort erkennbare Nebenwirkung mit Wahrscheinlichkeit 0,1. Durch ein Versehen bei der Herstellung mögen 10% der Tabletten äußerlich nicht feststellbar eine falsche Dosierung besitzen. Auch bei den falsch dosierten Tabletten zeigen sich Heil- und Nebenwirkung unabhängig voneinander, wobei jetzt die Heilwirkung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 und die Nebenwirkung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 eintreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann mit einer Heilwirkung gerechnet werden, wenn beim Einnehmen des Medikaments

(i) die Nebenwirkung eintritt,

(ii) die Nebenwirkung ausbleibt?

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ und $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ zwei diskrete Wahrscheinlichkeitsräume. Zeigen Sie, dass auf dem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P_1 \otimes P_2)$ die Ereignisse $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$ für jede Wahl von $A_1 \in 2^{\Omega_1}$ und $A_2 \in 2^{\Omega_2}$ stochastisch unabhängig sind.