Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch Universität des Saarlandes, SoSe 2013

10. Mai 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

4. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Angenommen, Sie befinden sich in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem Tor ist ein Preis, hinter den anderen befindet sich jeweils eine Niete. Der Preis und die Nieten sind vor der Show "rein zufällig" auf die Tore verteilt worden und Sie haben keine Information über die Position des Preises. Nachdem Sie ein Tor gewählt haben, bleibt dieses zunächst geschlossen. Der Showmaster S, der weiß, was sich hinter den Toren befindet, muss nun eines der beiden verbleibenden Tore öffnen. Hinter dem von ihm geöffneten Tor muss sich eine Niete befinden. Nachdem S ein Tor mit einer Niete geöffnet hat, fragt er Sie, ob Sie bei Ihrer ersten Wahl bleiben oder zum letzten verbliebenen Tor wechseln möchten. Nehmen Sie an, Sie wählen Tor 1, und S öffnet Tor 3 mit einer Niete. Er fragt Sie dann: "Möchten Sie zu Tor 2 wechseln?". Ist es vorteilhaft, Ihre Wahl zu ändern? Begründen Sie Ihre Antwort mittels wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Chevalier de Méré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 und die Augensumme 12 durch genauso viele Kombinationen (welche?) erzeugt würden.
Kann man die Beobachtung des Chevalier de Méré als "vom Zufall bedingt" ansehen oder steckt in seiner Argumentation ein Fehler? Führen Sie zur Lösung dieses Problems einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum ein.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Aus einer Urne, die drei weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, werden "rein zufällig" zwei Kugeln herausgegriffen und in eine zweite Urne gelegt, in der sich bereits vier weiße und vier schwarze Kugeln befinden.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 'rein zufällig" aus der zweiten Urne entnommene Kugel weiß ist?

(ii) Es sei bekannt, dass die aus der zweiten Urne zufällig entnommene Kugel eine weiße ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass vorher in die zweite Urne

a) zwei weiße Kugeln,

b) eine weiße und eine schwarze Kugel,

c) zwei schwarze Kugeln

gebracht worden sind. Benutzen Sie dazu die Formel von Bayes.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In einem Lostopf befinden sich 50 Lose, davon 5 Gewinnlose. Zwei Personen A und B ziehen nacheinander je ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Person B ein Gewinnlos zieht, wenn sie

(i) weiß, dass Person A etwas gewonnen hat,

(ii) weiß, dass Person A nichts gewonnen hat,

(iii) nicht weiß, ob Person A etwas gewonnen hat?

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Definieren Sie ein geeignetes Zufallsexperiment, welches die im folgenden Artikel beschriebene wahrscheinlichkeitstheoretische Problematik (bezüglich der Wiederholung von "unzuverlässigen" Tests) beschreibt:

`http://www.bbc.co.uk/news/magazine-22310186`

Vollziehen Sie anhand dieses Zufallsexperimentes die der ersten Hälfte des Artikels zugrunde liegenden Berechnungen nach.