Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
17. Mai 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

5. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 > 0$ und Y Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_2 > 0$. Außerdem seien X und Y unabhängig. Zeigen Sie, dass dann $X+Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X) \in (0,\infty)$ und $\mathrm{Var}(Y) \in (0,\infty)$. Außerdem seien $a^*, b^* \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E\left(|Y-(a^*X+b^*)|^2\right) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} E\left(|Y-(aX+b)|^2\right).$$

(i) Bestimmen Sie a^* und b^*.

(ii) Zeigen Sie, dass $a^* = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[-n,n]\cap\mathbb{Z}$, so dass $P(X=k) = P(X=-k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem sei $Y = aX^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Sind X und Y unabhängig bzw. unkorreliert?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien Y und Z zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei gilt

$$P(\{Z=1\}) = P(\{Z=-1\}) = P(\{Y=1\}) = P(\{Y=2\}) = \frac{1}{2}.$$

Wir definieren $X := YZ$. Sind X und Y unabhängig bzw. unkorreliert?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es werde mit einem idealen Würfel n-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable X_n zähle, wie oft dabei eine Sechs aufgetreten ist. Bestimmen Sie unter Benutzung der Tschebyscheff-Markov-Ungleichung ein möglichst kleines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass ${}^{17n}/_{108} < X_n < {}^{19n}/_{108}$ für alle $n \geq n_0$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $0,95$ gilt.