Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

7. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine Fluggesellschaft möchte die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze auf ihren Flügen verringern. Dazu sollen für jeden Flug mehr Tickets verkauft werden als Sitzplätze vorhanden sind. Jedes Flugzeug der Airline hat 370 Sitzplätze. Aus Erfahrung ist bekannt, dass im Durchschnitt 10% der Fluggäste nicht zum Abflug erscheinen. Pro Flug will die Airline 400 Tickets verkaufen und will daher die Wahrscheinlichkeit wissen, dass bei 400 verkauften Tickets mehr als 370 Fluggäste zum Abflug erscheinen. Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der

(a) geometrischen Verteilung mit Parameter $p \in (0,1]$,

(b) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$

und skizzieren Sie die Graphen der Funktionen für $p = 0,5$ bzw. $\lambda = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ ein Mengensystem, welches die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}$ erzeugt. Außerdem seien $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D} := \{B \in \mathscr{B} : X^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Schließen Sie aus (i), dass X genau dann eine reelle Zufallsvariable ist, wenn $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ für alle $B \in \mathcal{M}$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zu Bemerkung 7.6. Zeigen Sie, dass sowohl stetige als auch monotone Funktionen $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar sind, wobei $\mathbb{R}$ jeweils mit der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}$ ausgestattet ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zu Satz 7.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen von $(\Omega, \mathscr{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Dann sind auch

(i) $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n X_n$ (für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}$),

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} X_n$

reelle Zufallsvariablen.