Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
7. Juni 2013

# Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

## 8. Übung

### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie im Beispiel 6.19 der Vorlesung die bedingte erwartete Länge des Kuchenstückes, welches der jüngere Bruder bekommt, bedingt darauf, dass das Kuchenstück des älteren Bruders größer als $1/2$ ist.

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer reellwertigen Zufallsvariable $X$, wenn

(i) $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist,

(ii) $X = e^{\mu+\sigma Y}$, wobei $Y$ standardnormalverteilt ist und $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $\sigma > 0$.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

(i) Sei $X$ eine $\mathbb{Z}_+$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X \geq k).$$

(ii) Sei $X$ eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit Dichte. Zeigen Sie, dass

$$E(X) = \int_0^\infty P(X \geq s)\mathrm{d}s.$$

### Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $I$ ein Intervall, $X$ eine $I$-wertige Zufallsvariable mit Dichte sowie $g : I \to \mathbb{R}^+$ eine konvexe Funktion derart, dass die Erwartungswerte von $X$ und $g(X)$ existieren. Dann gelten $E(X) \in I$ und

$$g(E(X)) \leq E(g(X)).$$

### Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_k$, $k \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte $f$ und mit $\mathrm{Var}(X_n) < \infty$ für alle $n \in \{1, \ldots, k\}$. Berechnen Sie

$$E\left(\sum_{n=1}^k (X_n - S_n)^2\right), \qquad \text{wobei} \qquad S_n := \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n X_l.$$