Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2013
14. Juni 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

9. Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) $\min(X, Y)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ ist,

(ii) αX exponentialverteilt mit Parameter $\frac{\lambda_1}{\alpha}$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $N \in \mathbb{N}$ und für jedes $n \in \{1, \ldots, N\}$ seien X_n exponentialverteilt mit Parameter $\binom{n}{2}$, Y_n exponentialverteilt mit Parameter n und Z_n exponentialverteilt mit Parameter 1. Wir nehmen weiterhin an, dass die zufälligen Vektoren $(X_n)_{n=1}^N$, $(Y_n)_{n=1}^N$ und $(Z_n)_{n=1}^N$ jeweils stochastisch unabhängig sind. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ und $X^{(3)}$, welche durch

$$X^{(1)} := \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} nX_n, \qquad X^{(2)} := \sum_{n=1}^{N-1} Y_n \qquad \text{sowie} \qquad X^{(3)} := \max_{n\in\{1,\ldots,N-1\}} Z_n$$

gegeben sind, die gleiche Verteilung haben.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei X eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(X)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist. Gilt davon auch die Umkehrung, d.h. ist die Zufallsvariable $e^{-\lambda Y}$ gleichverteilt auf $[0, 1]$, wenn Y exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

(i) X^2 die Dichte f, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, hat.

(ii) $X^2 + Y^2$ exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$ ist.

Hinweis:
In (ii) können Sie die Substitution $y = x(1 - z^2)$ verwenden.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien X und Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass dann zwei Zufallsvariablen U und V, welche je gleichverteilt auf $[0,1]$ sind, existieren, so dass

$$X = \sqrt{-2\ln(U)} \cdot \cos(2\pi V) \qquad \text{und} \qquad Y = \sqrt{-2\ln(U)} \cdot \sin(2\pi V)$$

gelten.

Hinweis:
Benutzen Sie die Polarkoordinatendarstellung von (X, Y).