Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019

9. April 2019

Stochastik I

1. Übung

Aufgabe 1 **(6 Punkte)** Sei Ω eine abzählbar-unendliche Menge. Betrachten Sie das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \text{A ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

und die Abbildung

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{, falls } A^c \text{ endlich} \end{cases} \quad (A \in \mathcal{A}).$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Ring ist.

(ii) Untersuchen Sie ob μ ein Inhalt bzw. ein Prämaß ist.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** Sei Ω eine nichtleere Menge. Für beliebige Teilmengen $A, B \subset \Omega$ bezeichnen wir die Menge

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als *symmetrische Differenz* von A und B.
Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ist genau dann ein Ring (im Sinne von Definition 2.9), wenn $\mathcal{A}$ mit den Verknüpfungen Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einen kommutativen Ring (im Sinne der Algebra) bildet.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)** Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Ring und μ ein Prämaß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Prämaßes μ:

(i) *Endliche Additivität*: Für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Unter welcher Voraussetzung kann man dies zu

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

umstellen?

(iii) *Monotonie*: Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

(iv) *Sub-σ-Additivität*: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$