Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
19. Juni 2019

Stochastik I

11. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen in $L^1(P)$ mit $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ und $E[X_k] = 0$. Zeigen Sie:

(i) $E[|S_k|] \leq E[|S_{k+1}|]$ für $k = 1, \dots, n-1$.

(ii) Für $t \geq 4E[|S_n|]$:

$$P\left(\left\{\max_{k\leq n} |S_k| > t\right\}\right) \leq 2P\left(\left\{|S_n| > \frac{t}{2}\right\}\right).$$

(iii) $E\left[\max_{k\leq n} |S_k|\right] \leq 8E[|S_n|]$.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

(i) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reellwertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel Cantelli: Genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, so gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\frac{1}{n}|X_n| \geq \epsilon\right\}\right) < \infty$$

(ii) Sei die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$P(\{X_n = n\}) = P(\{X_n = -n\}) = \frac{1}{2n\log(n+1)}$$

und

$$P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n\log(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, nicht jedoch dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen in $L^2(P)$ mit $\mu := E[X_1]$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1] > 0$. Wir betrachten die empirische Varianz

$$\Sigma_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[(X_i - \bar{X}_n)^2\right],$$

wobei $\bar{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $E[\Sigma_n^2] = \sigma^2$.

(ii) $\Sigma_n^2 \to \sigma^2$ fast sicher.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** Seien X, Y reelle Zufallsvariablen und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

(i) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so gilt:

$$X_n \to c \text{ in Wahrscheinlichkeit } \Leftrightarrow X_n \to c \text{ in Verteilung}$$

(ii) Aus $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to Y$ in Verteilung folgt im Allgemeinen nicht $X_n + Y_n \to X + Y$ in Verteilung.

(iii) Gilt $X_n \to X$ in Verteilung und ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so folgt $g(X_n) \to g(X)$ in Verteilung.