Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
26. Juni 2019

Stochastik I

12. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Sei X Zufallsvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Gilt $X_n \to X$ in Verteilung und $Y_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit, so folgt

(a) $X_n + Y_n \to X + c$ in Verteilung.

(b) $X_n Y_n \to cX$ in Verteilung.

(c) $\frac{X_n}{Y_n} \to \frac{X}{c}$ in Verteilung für $c \neq 0$. (Wobei wir die Konvention verwenden, dass $\frac{1}{Y_n(\omega)} = k \in \mathbb{R}$ für $\omega \in \Omega$ mit $Y_n(\omega) = 0$)

Hinweis: Betrachten Sie die Folgen $((X_n, c))_{n\in\mathbb{N}}$ und $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Seien $F, F_1, F_2, \ldots$ Verteilungsfunktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ und gelte $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$ für alle Stetigkeitsstellen x von F. Sei $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$, $u \in (0, 1)$, die linksstetige Inverse von F. Zeigen Sie:

$$F_n^{-1}(u) \to F^{-1}(u) \text{ in jedem Stetigkeitspunkt } u \text{ von } F^{-1}$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Seien μ, μ_1, $\mu_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit $\mu_n \to \mu$ schwach. Zeigen Sie: Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und reelle Zufallsvariablen $X, X_1, X_2, \ldots$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungen $P_X = \mu$, $P_{X_n} = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$X_n \to X \ P\text{-f.s.}$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2. Welche Verteilung hat $F_n^{-1}(U)$, wobei U auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** Sei (S, d) ein metrischer Raum und P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(S)$. Zeigen Sie: Falls für alle stetig und beschränkten Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_S f \, dP = \int_S f \, dQ$$

dann folgt $P = Q$.

Hinweis: Nutzen Sie die Funktionenfolge $g_n(x) = 1 - (nd(x, A) \wedge 1)$ für $A \in \mathcal{B}(S)$ abgeschlossen, $x \in S$ und

$$d(x, A) := \inf_{y\in A} d(x, y).$$