Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019

2. Juli 2019

Stochastik I

13. Übung

Aufgabe 1 **(3 Punkte)** Seien $P, P_1, P_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \dots$. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen P und ist F stetig, so konvergiert die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen F.

Aufgabe 2 **(2 Punkte)** Seien $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen, sodass Y_j poissonverteilt ist mit Parametern $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$.
Bestimmen Sie die Verteilung von $Y_1 + \dots + Y_n$ mittels charakteristischen Funktionen.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Seien X eine Binomial(n, p)-verteilte Zufallsvariable und Y eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$.

(i) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen φ_X und φ_Y.

(ii) Benutzen Sie Teil (i), um Erwartungswert und Varianz von X und Y auszurechnen.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

(i) Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Aufgabe 3, Blatt 11, gilt:
Die Folge von Zufallsvariablen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\Sigma_n^2 n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass

$$\left[\overline{X}_n - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\Sigma_n^2},\ \overline{X}_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\Sigma_n^2}\right]$$

ein asymptotisches Konfidenzintervall für den Parameter μ zum Niveau $1-\alpha$ ist, wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und z das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung ist, also $\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mu \in \left[\overline{X}_n - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\Sigma_n^2},\ \overline{X}_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\Sigma_n^2}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

Aufgabe 5 **(4 Punkte)** Eine Fluggesellschaft möchte die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze auf ihren Flügen verringern. Dazu sollen für jeden Flug mehr Tickets verkauft werden als Sitzplätze vorhanden sind. Jedes Flugzeug der Airline hat 96 Sitzplätze. Aus Erfahrung ist bekannt, dass im Durchschnitt

(i) 5%.

(ii) 10%.

der Fluggäste nicht zum Abflug erscheinen. Pro Flug will die Airline 100 Tickets verkaufen und will daher die Wahrscheinlichkeit dafür wissen, dass bei 100 verkauften Tickets mehr als 96 Fluggäste zum Abflug erscheinen.

(a) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit für i) und für ii) jeweils approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

(b) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit für i) und für ii) jeweils approximativ mittels der Poisson-Approximation der Binomialverteilung (vgl. Satz 4.9 im Skript).