Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
17. April 2019

Stochastik I

2. Übung

Aufgabe 1 **(6 Punkte)** Seien Ω eine abzählbare, nicht-leere Menge und 2^Ω die zugehörige Potenzmenge. Wir bezeichnen mit $\sharp A$ die Anzahl der Elemente einer Menge $A \in 2^\Omega$, wobei $\sharp\emptyset = 0$ und für abzählbar unendliche Mengen A gilt $\sharp A = \infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für ein $\omega_0 \in \Omega$, definiert die folgende Vorschrift ein Prämaß δ_{ω_0} auf 2^Ω (Dirac-Maß):

$$\delta_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1, & \omega_0 \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \left(A \in 2^\Omega\right).$$

(ii) Durch die Vorschrift $\varrho(A) := \sharp A$, $A \in 2^\Omega$ ist ein Prämaß ϱ auf 2^Ω definiert. Dieses nennt man das Zählmaß auf 2^Ω.

(iii) Es gilt $\varrho(A) = \sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega(A)$ für alle $A \in 2^\Omega$.

(iv) Jedes Prämaß μ auf 2^Ω ist von der Form $\mu(A) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \delta_\omega(A)$ mit $p_\omega = \mu(\{\omega\})$ für alle $A \in 2^\Omega$.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** Es sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(a) μ ist ein Prämaß.

(b) *Stetigkeit von unten*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(c) *Stetigkeit von oben*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < \infty$ und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(d) *Stetigkeit von oben in $\emptyset$*: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d).$$

Zeigen Sie weiter, dass unter der zusätzlichen Bedingung $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ auch $(c) \Rightarrow (b)$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Seien Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf 2^Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Wir definieren die Abbildungen

$$\tilde{\mu} : 2^\Omega :\to [0, \infty];\ A \mapsto \inf\{\mu(B) |\ A \subset B,\ B \in \mathcal{R}\}$$

und

$$\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty];\ A \mapsto \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,\ B_n \in \mathcal{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

(ii) $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \mu$ ist Prämaß auf $\mathcal{R}$.

(iii) Es gelten $\tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(C)$ und $\mu^*(A) \le \mu^*(C)$ für $A, C \in 2^\Omega$ mit $A \subset C$.

(iv) $\tilde{\mu}$ ist subadditiv: $\tilde{\mu}(A \cup C) \le \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(C)$ für $A, C \in 2^\Omega$.

(v) μ^* ist σ-subadditiv: $\mu^* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ für $A_n \in 2^\Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$.