Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019

18. April 2019

Stochastik I

3. Übung

Aufgabe 1 **(7 Punkte)** Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger derselben σ-Algebra sind:

(i) $J_1 := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}^D,\ a \leq b\}$,

(ii) $J_2 := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^D,\ a \leq b\}$,

(iii) $J_3 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^D,\ a \leq b\}$,

(iv) $J_4 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}^D,\ a \leq b\}$,

(v) $J_5 := \{A \subset \mathbb{R}^D : A \text{ offen}\}$.

(vi) $F^{(D)} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a^{(i)}, b^{(i)}] \,\middle|\, a^{(i)}, b^{(i)} \in \mathbb{R}^D,\ a^{(i)} \leq b^{(i)}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Aufgabe 2 **(7 Punkte)** Gegeben seien eine überabzählbare Menge Ω und die beiden Mengensysteme

$$\mathcal{R} := \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ ist endlich}\}$$

und

$$\mathcal{S} := \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass

(i) $\mathcal{R}$ ein Ring ist.

(ii) $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist.

(iii) $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{S}$.

Zusätzlich sei für ein festes $\omega_0 \in \Omega$, das auf $\mathcal{R}$ definierte Prämaß

$$\mu_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & ,\omega_0 \in A \\ 0 & ,\omega_0 \in A^c \end{cases}$$

gegeben.

(iv) Zeigen Sie, dass die Erweiterung des Prämaßes μ_{ω_0} auf $\mathcal{R}$ zu einem Maß auf $\mathcal{S}$ nicht eindeutig ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(i) Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A}|_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Ω' ist.

(ii) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ σ-Algebren auf einer nicht-leeren Menge Ω. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.