

Stochastik I

4. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Zeigen Sie, dass ein Dynkin-System \mathcal{D} genau dann eine σ -Algebra ist, falls für je zwei Mengen aus \mathcal{D} auch ihr Durchschnitt in \mathcal{D} liegt.
- (ii) Ist \mathcal{E} ein Mengensystem von Teilmengen von Ω , das abgeschlossen bezüglich endlicher Durchschnitte ist, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$, wobei $\delta(\mathcal{E})$ das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Chevalier de Méré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 und die Augensumme 12 durch genauso viele Kombinationen (welche?) erzeugt würden. Kann man die Beobachtung des Chevalier de Méré als „vom Zufall bedingt“ ansehen oder steckt in seiner Argumentation ein Fehler? Führen Sie zur Lösung dieses Problems einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum ein und berechnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (i) Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Für jede natürliche Zahl $r \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}),$$

wobei die Summe über alle r -elementigen Teilmengen $\{i_1, \dots, i_r\}$ von $\{1, \dots, n\}$ summiert wird. Zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_r.$$

- (ii) Der Fachschaftsrat der Mathematik lädt n Studierende zu einer Informationsveranstaltung ein. Dazu werden n Briefe, die eine persönliche Anrede enthalten (die Briefe lassen sich also eindeutig den Studierenden zuordnen), ausgedruckt. Weiter wurden n adressierte Briefumschläge vorbereitet. Die n Briefe werden nun rein zufällig in die n Briefumschläge gesteckt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet?

- (iii) Wie verhält sich die in Teil (ii) berechnete Wahrscheinlichkeit im Grenzwert $n \rightarrow \infty$?

Aufgabe 4 (4 Punkte) Ein Osterhase versteckt 4 Ostereier rein zufällig an 3 verschiedenen Orten (Baum, Teich, Beet). Dabei sind die Eier ununterscheidbar und es muss nicht notwendigerweise an jedem Ort ein Ei versteckt sein.

- (i) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten die Eier zu verstecken.
- (ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 3 Eier im Beet versteckt sind.