Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
7. Mai 2019

Stochastik I

5. Übung

Aufgabe 1 **(2 Punkte)** Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ und die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto P((-\infty, x])$. Zeigen Sie, dass F genau dann stetig in $x \in \mathbb{R}$ ist, wenn $P(\{x\}) = 0$.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ die Abbildung

$$f : \{r \in \mathbb{N} | r \geq n\} \to [0,1],\, r \mapsto \binom{r-1}{n-1} p^n (1-p)^{r-n}$$

die Zähldichte eines W-Maßes ist. In welcher Beziehung steht f zu der Zähldichte der negativen Binomialverteilung (siehe Bemerkung 4.5)?

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** Wir betrachten den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{[0,1)}$ und P die Gleichverteilung auf $[0,1)$ ist. Gegeben sei das System von Mengen

$$A_n := \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n-4}{2^n}, \frac{2^n-3}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie die Unabhängigkeit der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** In einem Gefängnis sitzen drei zum Tode verurteilte Gefangene $G1$, $G2$ und $G3$. Mit Hilfe eines fairen Losentscheides wurde einer der Gefangenen begnadigt, das Ergebnis des Losentscheides ist den Gefangenen jedoch noch nicht bekannt. Der Gefangene $G1$ bittet einen Wärter, der das Ergebnis des Losentscheides kennt, ihm einen seiner Leidensgenossen zu nennen, der nicht begnadigt wird. Es sei bereits vor der Antwort bekannt, dass der Wärter mit gleicher Wahrscheinlichkeit $G2$ bzw. $G3$ sagt, falls $G1$ begnadigt wird und dass der Wärter nicht $G1$ sagt, falls $G2$ oder $G3$ begnadigt wird. Der Wärter antwortet $G3$. Nun überlegt sich $G1$: Da entweder $G2$ oder ich überleben werden, habe ich eine Überlebenswahrscheinlichkeit von $1/2$. Erläutern Sie mittels einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Rechnung, ob Sie der Überlegung von $G1$ zustimmen würden? Geben Sie dazu zunächst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)** Eine Krankheit tritt in einer Risikogruppe mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10000}$ auf. Eine Person, welche zu der Risikogruppe gehört, unterzieht sich einer Diagnosemethode, welche eine Erkrankung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8% erkennt und gesunde Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2% fälschlicherweise als positiv testet. Gemäß Beispiel 5.6 aus der Vorlesung, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine positiv getestete Person tatsächlich erkrankt ist, nur 4,75%. Für eine aussagekräftigere

Diagnose soll der Test deshalb zweimal unabhängig voneinander durchgeführt werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person erkrankt ist, wenn beide Tests positiv sind?

Hinweis: Die Unabhängigkeit der Tests ist so zu interpretieren, dass mögliche Fehlerquellen für die Diagnose in beiden Durchführungen unabhängig voneinander auftreten. Dies impliziert nicht, dass die beiden Ereignisse $A_1 :=$ „erster Befund positiv“ und $A_2 :=$ „zweiter Befund positiv“ stochastisch unabhängig sind.