Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
14. Mai 2019

Stochastik I

6. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Es seien (Ω_1, p_1) ein diskretes Zufallsexperiment und $\Omega_2 \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge. Außerdem sei für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ durch $p_2(\cdot|\omega_1) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ die Zähldichte eines W-Maßes auf Ω_2 gegeben. Wir betrachten eine Funktion p auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche durch $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2|\omega_1)$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass p die Zähldichte eines W-Maßes auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

(ii) Sei P das von p induzierte W-Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2})$. Zeigen Sie, dass

$$P(\Omega_1 \times A_2 | \{\omega_1\} \times \Omega_2) = \sum_{\omega_2 \in A_2} p_2(\omega_2|\omega_1)$$

für jedes $A_2 \subset \Omega_2$ gilt.

(iii) Welche Bedingungen muss man an p_2 stellen, damit unter P alle Ereignisse der Form $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$; $A_1 \subset \Omega_1$, $A_2 \subset \Omega_2$; unabhängig sind?

Aufgabe 2 **(2 Punkte)** Gegeben seien eine faire Münze und eine unfaire Münze, bei der das Ereignis “Kopf” mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{7}$ auftritt. Die Münzen sind ansonsten identisch. Wir wählen nun zufällig eine Münze aus, werfen sie und erhalten “Kopf”.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der geworfenen Münze um die faire Münze handelt?

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zwei $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbare, numerische Funktionen. Beweisen Sie:

(i) Die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ liegen in $\mathcal{A}$.

(ii) Die Funktionen $f + g$ und $f - g$ sind $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar, falls sie überall auf Ω definiert sind.

(iii) Die Funktion $f \cdot g$ ist $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)** Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse. Zeigen Sie, die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) A und B sind unabhängig.

(ii) A^c und B sind unabhängig.

(iii) A und B^c sind unabhängig.

(iv) A^c und B^c sind unabhängig.

Zeigen Sie außerdem:

(v) A und B sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unabhängige Zufallsvariablen sind.