Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
22. Mai 2019

Stochastik I

7. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine endliche Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(\Omega_i, 2^{\Omega_i})$ wobei die Ω_i, für $i = 1, \ldots, n$ höchstens abzählbar sind. Zeigen Sie: $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ ist unabhängig genau dann, wenn für alle $x_i \in \Omega_i$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i = x_i\}).$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von μ-Nullmengen, d.h.

$$\mathcal{N} := \{F \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(G) = 0 \text{ und } F \subset G\}$$

Wir definieren die *Vervollständigung* $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}).$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{N}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}.$$

Nun setzen wir μ auf $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ fort durch

$$\tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

für $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung wohldefiniert ist und dass $(\Omega, \mathcal{A}^{\mathcal{N}}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.

Bemerkung: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn alle Teilmengen von μ-Nullmengen in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten sind.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien f, g μ-integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f + g$ (falls überall definiert), $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ μ-integrierbar und es gilt

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu, \quad \int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Ist $f \leq g$, so folgt:

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nichtsteigende Folge messbarer, numerischer Funktionen mit $\int f_1^+ \, d\mu < \infty$.

(i) Zeigen Sie dass
$$\int \inf_n f_n \, d\mu = \inf_n \int f_n \, d\mu.$$

(ii) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Integrierbarkeitsbedingung an f_1 notwendig ist.