Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019
29. Mai 2019

Stochastik I

8. Übung

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert und die Varianz einer Poisson-verteilten Zufallsvariable.

(ii) für $k \in \mathbb{N}$ den Erwartungswert $E[Y^k]$, wobei Y eine normalverteilte Zufallsvariable sei.

(iii) für unabhängige, auf $[-1,1]$-gleichverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ den Erwartungswert $E[\max_{i=1,\dots,n} X_i]$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X, Y \in L^2(P)$ und es gelte $\mathrm{Var}(X) > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass mit der Wahl $a^* = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$ und $b^* = E[Y] - a^* E[X]$ die Funktion

$$f(a,b) = E[(Y - (aX + b))^2], \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

minimal wird.

(ii) Folgern Sie hieraus

$$X \text{ und } Y \text{ sind unkorreliert } \Leftrightarrow \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} E[(Y - (aX + b))^2] = \mathrm{Var}(Y).$$

Aufgabe 3 **(3 Punkte)** Wir betrachten einen Fußboden auf dem im Abstand von 1cm parallele Linien aufgezeichnet sind. Nun lassen wir zufällig eine Nadel der Länge $2l$ cm auf den Fußboden fallen, wobei $2l < 1$ sei. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien kreuzt?

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $f : \Omega \to [0, \infty]$ und

$$\begin{aligned}
&\underline{I}_\mu(f) = \sup\{I_\mu(g) | g \leq f,\ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\}, \\
&\overline{I}_\mu(f) = \inf\{\sup_n I_\mu(g_n) | \sup_n g_n \geq f,\ (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ steigende Folge in } \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\}.
\end{aligned}$$

Es gelte $\underline{I}_\mu(f) = \overline{I}_\mu(f) < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert eine steigende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ und eine fallende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ mit $g_n \leq f \leq h_n$ und

$$\int_\Omega (h_n - g_n) d\mu \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teil (i) erfült

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f \quad \mu\text{-fast sicher.}$$

(iii) f ist $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$-messbar und

$$\int_\Omega f d\mu = \underline{I}_\mu(f).$$