Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2019

5. Juni 2019

Stochastik I

9. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(i) Sei X eine auf der Menge $\{0,\dots,10\}$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zudem sei die Zufallsvariable $Y = 25-(X-5)^2$ gegeben. Überprüfen Sie X und Y auf Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.

(ii) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Für ein $\varrho \in [-1,1]$ sei außerdem $Z := \varrho X + \sqrt{1-\varrho^2}Y$. Berechnen Sie die Korrelation von X und Z.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Seien $X, \tilde{X}$ zwei Zufallsvariablen und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \xrightarrow{P} X$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{P} \tilde{X} \Leftrightarrow X = \tilde{X} \quad P\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit werten in $\mathbb{N}_0$ gilt:

$$P(\{X+Y=n\}) = \sum_{l=0}^{n} P(\{X=l\})P(\{Y=n-l\}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Seien nun X, Y zwei unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen zu den Parametern λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Dichte der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}},$$

wobei $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ für alle $x \geq 0$.

(i) Seien X und Y unabhängig χ^2-verteilt mit n bzw. m Freiheitsgraden. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.
Hinweis: Zeigen Sie, zunächst durch geeignete Substitutionen, dass $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ gilt.

(iI) Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Z = X_1^2 + \dots, X_n^2 \quad \chi^2$-verteilt ist mit n Freiheitsgraden.