# Diskrete Finanzmathematik

## Blatt 3

**Aufgabe 1** Betrachten Sie ein endliches 1-Perioden-Modell $\mathcal{M}$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $D = 1$, $S_t^0 = 1$ für $t \in \{0, 1\}$ und

$$S_0^1 = 12, \quad S_1^1(\omega_1) = 15, \quad S_1^1(\omega_2) = 9, \quad S_1^1(\omega_3) = 6.$$

(i) Bestimmen Sie alle linearen Preissysteme in $\mathcal{M}$.

(ii) Bestimmen Sie $\mathcal{I}_\xi := \{\pi(\xi) : \pi \text{ lineares Preissystem}\}$ für $\xi := \text{Call}(7, 1, 1)$.

(iii) Zeigen Sie, dass zu jedem $\xi \in L_0(\mathcal{F}_1)$ reelle Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ existieren mit

$$\xi = \alpha_0 S_1^0 + \alpha_1 S_1^1 + \alpha_2 \text{Call}(7, 1, 1).$$

(iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass

$$\xi \in L_0(\mathcal{F}_1) \setminus \mathcal{H} \iff \mathcal{I}_\xi \text{ ist ein offenes Intervall}$$

gilt.

**Aufgabe 2** Im Markt $\mathcal{M}$ aus Aufgabe 1 betrachten wir die Menge $\mathcal{D}$ der replizierbaren Kontrakte, die $\xi = \text{Call}(7, 1, 1)$ dominieren:

$$\mathcal{D} := \{\eta \in \mathcal{H} : \eta(\omega) \geq \text{Call}(7, 1, 1)(\omega) \, \forall \, \omega \in \Omega\}.$$

Für welches $\eta \in \mathcal{D}$ ist der Hedgingpreis $\widehat{\pi}(\eta)$ minimal?

*Hinweis:* Um das zugehörige lineare Optimierungsproblem zu lösen, findet man hier (im Abschnitt „Grundidee“) einen möglichen Ansatz:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Simplex-Verfahren#Grundidee`

**Aufgabe 3** *Zum Beweise von Satz 2.2.5.* Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \left\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n : \lambda_n \geq 0 \, \forall \, n \in \{1, \ldots, N\}, \, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1 \right\},$$

wobei $e_n$ den $n$-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^N$ bezeichnet, konvex und kompakt ist.