Diskrete Finanzmathematik

Blatt 4

Aufgabe 1 *Zu Lemma 3.1.2.* Es sei Ω ein endlicher Stichprobenraum und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass das Atomsystem von $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 Es sei $\mathcal{M}$ ein endliches 1-Perioden-Modell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $D = 1$ sowie

$$S_0^0 = 100, \quad S_1^0 = 110$$

und

$$S_0^1 = 80, \quad S_1^1(\omega_1) = x, \quad S_1^1(\omega_2) = 100.$$

Desweiteren gelte in $\mathcal{M}$ (LOP).

(i) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist der Markt vollständig?

(ii) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ existieren äquivalente Martingalmaße? Welche?

(iii) Gibt es Werte von x, für die der Markt vollständig ist, aber kein äquivalentes Martingalmaß besitzt?

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{M}$ ein endlicher Markt mit $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$, $T \in \mathbb{N}$, in dem (LOP) nicht gilt. Zeigen Sie, dass es für jeden replizierbaren Kontrakt $\xi \in \mathcal{H}$ und jede reelle Zahl $v \in \mathbb{R}$ ein Portfolio $\varphi \in \mathcal{A}^{sf}$ gibt, so dass $V_T(\varphi) = \xi$ und $V_0(\varphi) = v$ gelten.

Aufgabe 4 Zu einer Zufallsvariable $X = (X_1, \dots, X_T)$ auf einem messbaren $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in $\mathbb{R}^T$, $T \in \mathbb{N}$, definieren wir eine Familie von σ-Algebren auf Ω durch

$$\forall\, t \in \mathcal{T} := \{1, \dots, T\} : \ \mathcal{F}_t^X := \left\{ (X_1, \dots, X_t)^{-1}(B) : B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}^t \right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathcal{T}}$ ist eine Filtrierung auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

(ii) Ist Ω endlich, so ist A genau dann ein Element des Atomssytems von $\mathcal{F}_t^X$, wenn ein $\omega' \in \Omega$ existiert mit

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ für alle } s = 1, \dots, t \right\}.$$