Universität des Saarlandes
Ch. Bender 16. November 2016

Stochastische Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

1. Es sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Wir betrachten für festes $T > 0$ den Prozess

$$X(t) = W(t) - \frac{t}{T} W(T), \quad t \in [0, T].$$

Zeigen Sie:

- X ist ein Gaußscher Prozess.
- $E[X(t)] = 0$ und $Cov(X(t), X(s)) = (t \wedge s) - ts/T$ für alle $t, s \in [0, T]$.
- X hat stetige Pfade.
- $W(T)$ ist unabhängig von $(X(t),\ 0 \le t \le T)$.

2. Es seien W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und $\alpha \in (0, 1)$. Untersuchen Sie die folgende Differentialgleichung mit additivem Rauschen auf Existenz und Eindeutigkeit:

$$X(t) = \int_0^t |X(u) - W(u)|^\alpha du + W(t), \quad t \ge 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$g(t, s) = ((1 - \alpha)(t - s))^{1/(1-\alpha)}, \quad 0 \le s \le t < \infty.$$