Universität des Saarlandes
Ch. Bender 31. Januar 2017

Stochastische Differentialgleichungen

10. Übungsblatt

1. Es sei M ein positives Martingal mit $M(0) = 1$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Für $T > 0$ sei

$$Q(A) = \int_A M(T) dP, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Dann ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_T$ und für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ und $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ gilt:

$$E^Q[\xi|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{M_s} E^P[M(t)\xi|\mathcal{F}_s]$$

P- und Q-fast sicher.

2. Es sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und Y ein adaptierter Prozess mit $Y\mathbf{1}_{[0,T]} \in V^*$ für jedes $T > 0$. Dann gilt:

$$M(t) = \exp\{\int_0^t Y(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t Y^2(s) ds\}, \quad t \geq 0$$

ist ein Martingal genau dann, wenn $E[M(t)] = 1$ für alle $t \geq 0$.