

Stochastische Differentialgleichungen

11. Übungsblatt

1. Gegeben sei ein Black-Scholes-Modell mit $\mu = r = 0$ und $\sigma = 1$. Wir definieren einen Portfolioprozess π mittels folgender Konstruktion: Zu $T > 0$ seien

$$\begin{aligned}t_k &= T(1 - 2^{-k}), \quad c_k = \sqrt{T2^{-k}}, \quad k \geq 0, \\ \tau &= \inf\{t_k > 0; W(t_k) - W(t_{k-1}) \geq c_k\} \wedge T, \\ x_j &= x_{j-1} + \frac{1 - x_{j-1}}{c_j} (W(t_j \wedge \tau) - W(t_{j-1} \wedge \tau)), \quad j \geq 1, \quad x_0 = 0, \\ \pi(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 - x_{j-1}}{c_j} \mathbf{1}_{(t_j \wedge \tau, t_{j+1} \wedge \tau]}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- τ ist eine Stoppzeit mit $\tau < T$ P -fast sicher.
- π ist ein Portfolioprozess.
- Für den zu π gehörenden Vermögensprozess $V^{(0,\pi)}$ mit Anfangskapital 0 gilt:

$$V^{(0,\pi)}(T) \geq 1$$

P -fast sicher.