Universität des Saarlandes
Ch. Bender 13. Februar 2017

Stochastische Differentialgleichungen

12. Übungsblatt

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, der eine eindimensionale Brownsche Bewegung trägt. Wir nehmen an, dass $\mathbb{F}$ die Augmentierung der Brownschen Filtrierung ist. Sei $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Zeigen Sie, dass

$$E[\xi] + \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\xi \frac{W(T(i+1)/n) - W(Ti/n)}{T/n} \middle| \mathcal{F}_{Ti/n}\right] (W(T(i+1)/n) - W(Ti/n))$$

für $n \to \infty$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ gegen ξ konvergiert.

Hinweis: Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (W(T(i+1)/n) - W(Ti/n)) \middle| \, \forall_i \, \eta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{Ti/n}, P) \right\}.$$

Zeigen Sie:

- Es existiert eine Folge (ξ_n) mit $\xi_n \in A_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass (ξ_n) in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ gegen $\xi - E[\xi]$ konvergiert.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist A_n ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.
- Die orthogonale Projektion π_{A_n} auf A_n ist gegeben durch

$$\pi_{A_n}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\xi \frac{W(T(i+1)/n) - W(Ti/n)}{T/n} \middle| \mathcal{F}_{Ti/n}\right] (W(T(i+1)/n) - W(Ti/n)).$$