

## Stochastische Differentialgleichungen

### 2. Übungsblatt

1. Es sei  $W$  eine Brownsche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ . Wir betrachten für festes  $T > 0$  den Prozess

$$Y(t) = \frac{W(t)}{T-t} - \int_0^t \frac{W(u)}{(T-u)^2} du, \quad t \in [0, T).$$

Zeigen Sie:

- $Y$  ist ein Martingal auf  $[0, T)$ .
- Die Varianz von  $Y(t)$  ist für  $t \in [0, T)$  gegeben durch

$$V(t) := \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}.$$

- Sei  $A$  die Umkehrfunktion von  $V$ . Dann definiert  $B(t) := Y(A(t))$ ,  $t \geq 0$ , eine Brownsche Bewegung  $B$  bezüglich  $\mathbb{F}^B$ .
- Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(A(t))}{t} = 0 \quad P\text{-fast sicher.}$$

- Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow T} (T-t)Y(t) = 0 \quad P\text{-fast sicher.}$$