Universität des Saarlandes
Ch. Bender 25. November 2016

Stochastische Differentialgleichungen

3. Übungsblatt

1. Es seien W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $Y \in V$, $a \in [0, \infty)$, ξ eine beschränkte $\mathcal{F}_a$-messbare Zufallsvariable und τ eine *optionale Zeit*, d.h. eine $[0, \infty]$-wertige Zufallsvariable mit $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie:

- $\tilde{Y} := \xi Y \mathbf{1}_{[a,\infty)} \in V$ und
$$\int_0^\infty \tilde{Y}(s) dW(s) = \xi \int_a^\infty Y(s) dW(s).$$
- Nimmt τ nur endlich viele Werte $0 \leq t_1 < \cdots < t_K \leq \infty$ an, so gilt für alle $k = 1, \ldots, K$:
$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) Y(s) dW(s) = \int_0^{t_k} Y(s) dW(s)$$
P-fast sicher auf $\{\tau = t_k\}$.
- Ist τ beliebig, so gilt für P-fast alle $\omega \in \Omega$
$$\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) Y(s) dW(s) \right)(\omega) = \left(\int_0^{\tau(\omega)} Y(s) dW(s) \right)(\omega).$$

Hinweis: Hierzu kann man
$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \tau(\omega) \geq n \\ \frac{k}{2^n}, & \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n},\ k = 1, \ldots, n2^n \end{cases}$$
betrachten.