Universität des Saarlandes
Ch. Bender

6. Dezember 2016

# Stochastische Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

**1.** Es seien $W$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t b_i(s)ds + \int_0^t Y_i(s)dW(s), \quad t \geq 0,\ i = 1, 2,$$

stochastische Prozesse, deren Koeffizienten die Voraussetzungen der Itô-Formel erfüllen. Berechnen Sie mit der Itô-Formel $X_1^2(t)$ und zeigen Sie damit, dass für $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} X_1(t)X_2(t) &= X_1(0)X_2(0) + \int_0^t (X_1(s)b_2(s) + X_2(s)b_1(s))ds \\ &\quad + \int_0^t (X_1(s)Y_2(s) + X_2(s)Y_1(s)dW(s) + \int_0^t Y_1(s)Y_2(s)ds. \end{aligned}$$

**2.** Es seien $W$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und

$$X(t) = e^{t/2}\sin(W(t)), \quad Z(t) = e^{t/2}\cos(W(t)), \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$X(t) = \int_0^t Z(s)dW(s), \quad Z(t) = 1 - \int_0^t X(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$