Universität des Saarlandes 13. Dezember 2016
Ch. Bender

Stochastische Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

1. Es seien W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $t > 0$ und $\alpha \in [0,1]$. Berechnen Sie in Abhängigkeit von α den $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$-Grenzwert

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{t_i \in \pi \setminus \{t\}} W(\alpha t_i + (1-\alpha) t_{i+1})(W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

wobei π die Partitionen von $[0,t]$ durchläuft.

2. Es seien W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und

$$X(t) = \int_0^t \big(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(W(s)) - \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(W(s))\big)\, dW(s).$$

Zeigen Sie, dass X eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ist und dass

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^t \big(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(W(s)) - \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(W(s))\big)\, dX(s), \\ -W(t) &= \int_0^t \big(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(-W(s)) - \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(-W(s))\big)\, dX(s). \end{aligned}$$