Universität des Saarlandes
Ch. Bender 02. Januar 2017

# Stochastische Differentialgleichungen

6. Übungsblatt

**1.** Es seien $W$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\xi$ eine $\mathcal{F}_0$-messbare reellwertige Zufallsvariable, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig und $\sigma > 0$. Zeigen Sie:

- Die 'pfadweise' gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} Y(t,\omega) = e^{-\sigma W(t,\omega)} b\left(Y(t,\omega) e^{\sigma W(t,\omega)}\right) - \frac{\sigma^2}{2} Y(t,\omega), \quad Y(0,\omega) = \xi(\omega)$$

  hat für jedes $\omega \in \Omega$ eine eindeutige Lösung $Y(t,\omega)$, $t \geq 0$. Diese definiert eine $\mathbb{F}$-adaptierten Prozess $Y$.

- Sei $X(t) = Y(t) e^{\sigma W(t)}$. Dann ist $X$ eine starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(0) = \xi.$$

**2.** Es seien $W$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und

$$X(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} \exp\left\{\frac{-W(t)^2}{2(1-t)}\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad 0 \leq t < 1.$$

- Stellen Sie $X$ mit Hilfe der Itô-Formel in der Form

$$X(t) = \int_0^t Y(s) dW(s)$$

  für einen stochastischen Prozess $Y$ mit $Y\mathbf{1}_{[0,1]} \in V^*$ dar.

- Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 Y(s) dW(s) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$