Universität des Saarlandes
Ch. Bender

06. Januar 2017

Stochastische Differentialgleichungen

7. Übungsblatt

1. Es seien W eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sei stetig differenzierbar und erfülle geeignete Integrierbarkeitsbedingungen, so dass

$$x \mapsto h(x) := \int_a^x \frac{1}{\sigma(y)} dy$$

eine bijektive Funktion auf $\mathbb{R}$ darstellt. Untersuchen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \frac{1}{2}\sigma(X(t))\sigma'(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

auf starke Existenz und Eindeutigkeit.

Hinweis: Betrachten Sie die Transformation $Y(t) = h(X(t))$.

2. Verwenden Sie die Transformation aus Aufgabe 1 (heuristisch), um je eine starke Lösung für folgende stochastischen Differentialgleichungen zu finden:

(i)
$$dX(t) = 1dt + 2\sqrt{X(t)}dW(t), \quad X(0) = X_0 \geq 0.$$

(ii)
$$dX(t) = -X(t)(2\ln(X(t)) + 1)dt - 2X_t\sqrt{-\ln(X(t))}dW(t), \quad X(0) = X_0 \in (0, 1].$$

(iii)
$$dX(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + \sqrt{X^2(t) - 1}dW(t), \quad X(0) = X_0 \geq 1.$$