Universität des Saarlandes
Ch. Bender 17. Januar 2017

Stochastische Differentialgleichungen

8. Übungsblatt

1. Zeigen Sie: Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.6 existiert auch dann eine starke Lösung, wenn die Anfangsbedingung X_0 lediglich $\mathcal{F}_0$-messbar ist (aber nicht notwendig quadratintegrierbar). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Sei $X_0^{(k)} = X_0 \mathbf{1}_{\|X_0\| \leq k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass zur Anfangsbedingung $X_0^{(k)}$ eine eindeutige starke Lösung $X^{(k)}$ existiert.
- Zeigen Sie, dass eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass für $l > k$

$$E[\sup_{0 \leq s \leq t} \|(X_s^{(k)} - X_s^{(l)})\|^2 \mathbf{1}_{\{\|X_0\| \leq k\}}] \leq L \int_0^t E[\sup_{0 \leq s \leq u} \|(X_s^{(k)} - X_s^{(l)})\|^2 \mathbf{1}_{\{\|X_0\| \leq k\}}] du.$$

  Verwenden Sie dazu, dass

$$\begin{aligned} (X_t^{(k)} - X_t^{(l)}) \mathbf{1}_{\{\|X_0\| \leq k\}} &= \int_0^{t \wedge \tau_k} (b(s, X_s^{(k)}) - b(s, X_s^{(l)})) ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_k} (\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(l)})) dW(s), \end{aligned}$$

  wobei

$$\tau_k = \begin{cases} 0, & \|X_0\| > k \\ +\infty, & \|X_0\| \leq k. \end{cases}$$

- Schließen Sie, dass für alle $l > k$ gilt:

$$P(\{\|X_0\| \leq k\} \cap \{\sup_{0 \leq s < \infty} \|(X_s^{(k)} - X_s^{(l)})\| \neq 0\}) = 0.$$

- Zeigen Sie, dass der Prozess

$$X(t, \omega) := \sum_{k=0}^{\infty} X^{(k)}(t, \omega) \mathbf{1}_{\{(k-1) < \|X_0\| \leq k\}}$$

  die gesuchte starke Lösung ist.