Universität des Saarlandes 19. Januar 2017
Ch. Bender

Stochastische Differentialgleichungen

9. Übungsblatt

1. Es sei $D \in \mathbb{N}$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der eine D-dimensionale Brownsche Bewegung $\tilde{W}$ trägt. Für Konstanten $\kappa \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und eine nichtnegative $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable X_0 sei

$$Y_d(t) := e^{-\kappa t/2} \left(\sqrt{X_0/D} + \frac{\sigma}{2} \int_0^t e^{\kappa s/2} d\tilde{W}_d(s) \right).$$

Ferner seien

$$\begin{aligned} X(t) &:= \sum_{d=1}^{D} (Y_d(t))^2 \\ W(t) &:= \sum_{d=1}^{D} \int_0^t \frac{Y_d(s)}{\sqrt{X(s)}} d\tilde{W}_d(s) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Das Triple (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathbb{F}$ ist eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichungen

$$dX(t) = \left(\frac{D\sigma^2}{4} - \kappa X(t) \right) dt + \sigma \sqrt{|X(t)|} dW(t)$$

mit Anfangsverteilung $\mu(A) = P(\{X_0 \in A\})$.