Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
PD Dr. Yana Kinderknecht
WiSe 2018 / 19

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen

Übungsblatt 2 (15 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 08.11.2018.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Betrachte den Banachraum $C_\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{\varphi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0\right\}$ mit der Supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $v \in C(\mathbb{R}^d)$. Betrachte den Multiplikationsoperator $(V, \mathrm{Dom}(V))$ mit $(V\varphi)(x) := v(x)\varphi(x)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Dom}(V) := \{u \in C_\infty(\mathbb{R}^d) : vu \in C_\infty(\mathbb{R}^d)\}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

a) *(2 Punkte)* Zeige, dass der Multiplikationsoperator $(V, \mathrm{Dom}(V))$ abgeschlossen und dicht definiert ist.

b) *(2 Punkte)* Sei v nach oben beschränkt, d.h. $\exists\, C > 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} v(x) \leq C$. Betrachte die Opertoren $(T_v(t))_{t\geq 0}$ mit $(T_v(t)\varphi)(x) := e^{tv(x)}\varphi(x)$. Zeige, dass $(T_v(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist und finde den Erzeuger.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Definiere $(T_b(t))_{t\geq 0}$ durch $(T_b(t)f)(x) := f(x + tb)$ auf den Banachräumen

a) $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremum-Norm $\|\cdot\|_\infty$;

b) $C_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x+2\pi) = f(x)\, \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ (wobei $d = 1$) mit der Supremum-Norm $\|\cdot\|_\infty$;

c) $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, mit der L^p-Norm.

Für jeden Raum: Finde den Erzeuger von $(T_b(t))_{t\geq 0}$.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der Summennorm, $L(x_1, x_2) := (x_2, 0)$ und $T_t := e^{tL}$. Bestimme die Wachstumsschranke von $(T_t)_{t\geq 0}$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Satz: *Für eine stark stetige Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X mit Erzeuger $(L, \mathrm{Dom}(L))$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(T_t)_{t\geq 0}$ *ist normstetig.*

(ii) L *ist ein beschränkter linearer Operator.*

(iii) $\mathrm{Dom}(L) = X$.

Hinweis: Zeige: (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Für (i) $\Rightarrow$ (iii): Betrachte $V(t) : V(t)\varphi = \frac{1}{t}\int\limits_0^t T_s\varphi\, ds$ für alle $\varphi \in X$. Zeige, dass $\|V(t) - \mathrm{Id}\,\| \to 0$ und deshalb $V(t)$ für hinreichend kleines t invertierbar ist (benutze Eigenschaften Neumannscher Reihe).

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/2018_index.html