Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
PD Dr. Yana Kinderknecht
WiSe 2018/19

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen

Übungsblatt 3 (15 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 06.12.2018.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Seien $b \in \mathbb{R}^d$ und $c > 0$ gegeben. Finde (in der Form von Integraloperatoren) die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, deren Erzeuger die Abschließung von $(L, S(\mathbb{R}^d))$ ist, wobei

$$L\varphi := \Delta\varphi + b \cdot \nabla\varphi - c\varphi \quad \text{für alle} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Hinweis: Betrachte L als ein Pseudodifferentialoperator.

Aufgabe 9. (2+2+2=6 Punkte)

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für jedes $t > 0$ die inverse Fourier-Transformation der Funktion $\lambda_t(x) := (2\pi)^{-1/2}e^{-t|x|}$ durch die Funktion ρ_t gegeben ist, wobei

$$\rho_t(x) := \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

b) Zeige, dass die Familie $(T(t))_{t\geq 0}$ mit $T(0) := \mathrm{Id}$ und $T(t) : T(t)\varphi = \varphi * \rho_t$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf $C_\infty(\mathbb{R})$ ist. (Die ist *Cauchysche Halbgruppe* genannt).

c) Finde den Pseudodifferentialoperator, der die Cauchysche Halbgruppe erzeugt.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Seien $(T_t)_{t\geq 0}$ und $(S_t)_{t\geq 0}$ normstetige Halbgruppen auf Banachräumen E und F bzw. Seien A der Erzeuger von $(T_t)_{t\geq 0}$ und B der Erzeuger von $(S_t)_{t\geq 0}$. Betrachte $X := \mathcal{L}(F, E) =$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von F nach E. Betrachte die Familie $(U_t)_{t\geq 0}$ von Operatoren auf X, gegeben durch

$$U_t\varphi := T_t \circ \varphi \circ S_t, \qquad \forall \ \varphi \in X.$$

Zeige, dass $(U_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X ist (sie ist *implementierte Halbgruppe* genannt), und finde deren Erzeuger.

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/index.html