Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
PD Dr. Yana Kinderknecht
WiSe 2018/19

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen

Übungsblatt 4 (15 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 10.01.2019.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe auf $\mathbb{R}^d$. Betrachte die folgende Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ von Operatoren auf $X := C_\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$T_t\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,(x-y)\,\mu_t(dy), \qquad \forall\ \varphi \in X.$$

Sei D die Menge aller Funktionen $\varphi \in X$, die unendlich oft differenzierbar sind und alle ihren partiellen Ableitungen wieder in X liegen. Zeige, dass $T_t : D \to D$.

Aufgabe 12. (2+3=5 Punkte)

Sei $(\xi_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy Prozess mit Lévy Charakteristiken $(0, b, A, N)$.

a) Zeige, dass $(X_t)_{t\geq 0}$, $X_t := -\xi_t$ für alle $t \geq 0$, auch ein ein Lévy Prozess ist; finde Lévy Charakteristiken von $(X_t)_{t\geq 0}$.

b) Zeige, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$, $Y_t := \xi_t + \gamma t$ für alle $t \geq 0$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, auch ein ein Lévy Prozess ist; finde Lévy Charakteristiken von $(Y_t)_{t\geq 0}$.

Aufgabe 13. (3+3=6 Punkte)

Seien $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe auf $\mathbb{R}^d$, $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Betrachte die Familie $(T_t^B)_{t\geq 0}$ auf X:

$$T_t^B\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(e^{tB}x + y\right)\mu_t(dy), \qquad \forall\ \varphi \in X.$$

a) Zeige, dass $(T_t^B)_{t\geq 0}$ eine Fellersche Halbgruppe ist. (Sie heißt die *Ornstein–Uhlenbeck Halbgruppe.*)

b) Finde den Erzeuger von $(T_t^B)_{t\geq 0}$.

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/2018_index.html