Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
PD Dr. Yana Kinderknecht
WiSe 2018/19

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen
Übungsblatt 6 (15 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 31.01.2019.

Aufgabe 16. (4+2=6 Punkte)

a) Sei X ein Hilbertraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeige, dass ein linear Operator $A : X \supset \mathrm{Dom}(A) \to X$ genau dann dissipativ ist, wenn $\mathrm{Re}\langle A\varphi, \varphi\rangle \leq 0$ für alle $\varphi \in \mathrm{Dom}(A)$.

b) Zeige, dass der folgende Operator $(L, C_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ dissipativ ist:
$$L\varphi(x) := \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \right).$$
Hier $a_{kj} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und für alle x, $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt $\sum\limits_{j,k=1}^{d} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq 0$.

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Seien $(T_1(t))_{t\geq 0}$ und $(T_2(t))_{t\geq 0}$ stark stetige Operatorhalbgruppen auf einem Banachraum X mit Erzeugern $(L_1, \mathrm{Dom}(L_1))$ bzw. $(L_2, \mathrm{Dom}(L_2))$, sodass $\|T_1(t)\| \leq e^{w_1 t}$, $\|T_2(t)\| \leq e^{w_2 t}$ für einige w_1, $w_2 \in \mathbb{R}$ und alle $t \geq 0$. Seien $D := \mathrm{Dom}(L_1) \cap \mathrm{Dom}(L_2)$, $L := L_1 + L_2$ auf D, und $\overline{(L, D)}^X$ erzeuge eine stark stetige Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

a) $\quad F(t) := \tau T_1(t) + (1-\tau)T_2(t) \quad \sim \quad T(t) \qquad \forall\, \tau \in [0,1];$

b) $\quad F(t) := T_1(\theta t) \circ T_2(t) \circ T_1((1-\theta)t) \quad \sim \quad T(t) \qquad \forall\, \theta \in [0,1].$

Aufgabe 18. (3+2=5 Punkte)

a) Sei $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ eine genügend gute Funktion, sodass $\psi(x, \cdot)$ eine CNDF für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist. Betrachte die Familie linearer Operatoren $(F(t))_{t\geq 0}$ auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gegeben durch
$$F(t)\varphi(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(x-q)} e^{-t\psi(x,p)} \varphi(q)\, dq\, dp.$$
Seien für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Faltungshalbgruppen $(\eta_t^x)_{t\geq 0}$ und $(\mu_t^x)_{t\geq 0}$ durch ihre Fourier-Transformation gegeben:
$$\mathcal{F}\left[\eta_t^x\right](p) := (2\pi)^{-d/2} e^{-t\psi(x,p)}, \qquad \mathcal{F}\left[\mu_t^x\right](p) := (2\pi)^{-d/2} e^{-t\psi(x,-p)-ip\cdot x}.$$

Zeigen Sie:

$$F(t)\varphi(x) = (\varphi * \eta_t^x)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(q)\mu_t^x(dq).$$

b) Bestimmen Sie $(\mu_t^x)_{t\geq 0}$ falls $d = 1$ und $\psi(x,p) = A(x)p^2 + ib(x)p + c(x)$, wobei A, b, c stetige Funktionen sind mit $c(x) \geq 0$ und $A(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda > 0$.

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:

https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/2018_index.html