Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

Übungen zur Linearen Algebra 1

Präsenzblatt 20. Oktober 2015

Aufgabe 1. Behauptung:
Wenn sich unter n Äpfeln ein Apfel befindet, in dem sich ein Wurm eingenistet hat, so haben sich schon in allen Äpfeln Würmer eingenistet.

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang:
Die Aussage für $n = 1$ ist offensichtlich wahr, denn wenn in einem Apfel ein Wurm nistet, dann nistet in diesem Apfel ein Wurm.
Induktionsschluss:
Sei unter $n + 1$ Äpfeln ein Apfel, in dem ein Wurm nistet. Wir legen die Äpfel in eine Reihe und betrachten die ersten n und die letzten n Äpfel. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Wurm in einem der ersten n Äpfel. Nach der Induktionsannahme nisten dann schon in allen der ersten n Äpfel Würmer. Damit befindet sich aber auch unter den letzten n Äpfeln ein Apfel, in dem ein Wurm nistet; und wiederum mit der Induktionsannahme folgt, dass in allen der letzten n Äpfel Würmer nisten. Insgesamt nisten also in allen $n + 1$ Äpfeln Würmer.

Wo ist der Fehler?

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie für $n > 3$, dass $2^n + 1 > n^2$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$.

Aufgabe 3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem mit Unbestimmten $x, y \in \mathbb{R}$

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$$

mit $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j, k \leq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt genau dann wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist.

(b) Geben Sie eine Formel der Lösung an, falls das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, d.h. jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ lässt sich als eindeutige linear Kombination $v = \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ der beiden Vektoren darstellen.

(b) Geben Sie ein Kriterium an, um zu entscheiden ob zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ eine Basis bilden.